**I. Równanie o zmiennych rozdzielonych.**

Jest to równanie różniczkowe pierwszego stopnia, które można przedstawić w postaci:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0.$$

Takie równanie całkuje się obustronnie po rozseparowanych zmiennych, otrzymując jego rozwiązanie.

**Przykład:** rozwiązać równanie $y' = \frac{2y}{x}$.

Rozwiązujemy: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln y = 2 \ln x + C \Leftrightarrow y = C_1 x^2.$

**II. Metoda redukcji stopnia równania. Przykład fizyczny: oscylator harmoniczny.**

Jest to fundamentalne zagadnienie w fizyce; z ruchem drgającym (oscylującym) harmonicznym spotykamy się m.in.: w przypadku ciężarka na sprężynie, fal na wodzie i w powietrzu, fal elektromagnetycznych, w fizyce atomowej oraz mechanice kwantowej.

W najprostszym fizycznie przypadku, mamy poziomo (wzdłuż osi x) położoną sprężynę o twardości (sprężystości) *k,* lekką w stosunku do ciężarka (punktu materialnego) o masie *m*, który umieszczono na jej końcu; drugi koniec sprężyny jest przyczepiony do ściany. Za x=0 przyjmujemy ten punkt, w którym układ spoczywa – sprężyna nie jest ani sprężona, ani rozciągnięta. Jest to *położenie równowagi.* Zgodnie z prawem Hooke'a, im bardziej (palcami) wyprowadzimy ciężarek z położenia równowagi, tym proporcjonalnie większą siłą sprężystości sprężyna będzie starała się go przywrócić do położenia równowagi (siła jest proporcjonalna do *x*, stałą proporcjonalności jest k). Po wypuszczeniu ciężarka z palców, zacznie on przyspieszać w kierunku x=0 po (zakładamy tutaj) pozbawionej tarcia powierzchni stołu. Należy znaleźć ruch x(t) ciężarka.

Piszemy dynamiczne równanie ruchu, czyli treść drugiej zasady Newtona: niezrównoważona siła powoduje przyspieszenie $a \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$ ciała o masie *m.*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Pisząc $\omega^2 := \frac{k}{m}$ i stosując notację „kropkową” Newtona otrzymujemy równanie

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne, jednorodne drugiego stopnia. Można je rozwiązać albo „przez popatrzenie” - zauważając, że tylko dwie funkcje są proporcjonalne do swojej drugiej pochodnej, mianowicie sinus i cosinus, albo stosując metodę ogólną mającą na celu obniżenie stopnia równania różniczkowego. Można jej użyć wtedy, gdy równanie nie zawiera *explicité* zmiennej niezależnej *t.*

Wprowadzamy $p := \frac{dx}{dt}$; wówczas $\frac{d^2x}{dt^2} \equiv \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dt} \equiv \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt} \equiv p\frac{dp}{dx}$ i nasze równanie przyjmuje postać:

$$p\frac{dp}{dx} + \omega^2 x = 0 \quad .$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych (cf. problem I.), $p\,dp = -\omega^2 x\,dx$. Stąd

$$\frac{1}{2}p^2 = -\frac{\omega^2}{2}x^2 \Leftrightarrow p = i\omega x \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = i\omega x \quad .$$

Ponownie mamy równanie o zmiennych rozdzielonych,

$$\frac{dx}{x} = i\omega \, dt \Leftrightarrow \ln x = i\omega t + C_2 \Leftrightarrow x = e^{i\omega t + C_3} \cdot C_4 \equiv Ae^{i\omega t + \varphi_1}.$$

Naszym rozwiązaniem jest więc część rzeczywista x, $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1)$ , lub równoważnie (klasyczna postać): $x(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$ . Oczywiście, $A$ stanowi amplitudę drgań ciężarka, $\omega$ jest jej częstością kołową (równą 2π / okres), a φ – fazą, czyli stanem początkowym wychylenia.

### III. Przykład fizyczny: rozpad promieniotwórczy.

Atomy pierwiastka promieniotwórczego, o początkowej liczbie $N_0$ rozpadają się z szybkością (stałą rozpadu) λ. Należy opisać liczbę N atomów w próbce w funkcji czasu, znaleźć średni czas życia atomu w próbce oraz okres połowicznego rozpadu, czyli czas, po którym statystycznie pozostanie w próbce połowa pierwotnej liczby atomów.

Liczba atomów, które w danej chwili *dt* ulegną rozpadowi, zależy (oczywiście) od λ oraz od chwilowej wartości N (im więcej atomów, proporcjonalnie do tym większej statystycznie liczby rozpadów może dojść). A zatem

$$\frac{dN}{dt} = -N\lambda.$$

Znak minus jest tu z oczywistego powodu ubytku liczby N (tzn. dN < 0). Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych (cf. problem I.). A zatem

$$\frac{dN}{N}=-\lambda dt \;\Leftrightarrow\; C\ln N=-\lambda t \;\Leftrightarrow\; N=C_1 e^{-\lambda t} \;\equiv\; N_0\; e^{-\lambda t}.$$

A zatem liczba cząstek zmniejsza się zgodnie z krzywą wykładniczą, od $N_0$ w chwili t=0 aż do zera asymptotycznie w nieskończoności. Krzywa ta ma naturalnie charakter statystyczny.

Licząc średni czas życia atomu $\langle t\rangle \equiv \tau = \dfrac{\int_0^\infty N_0 e^{-\lambda t}\, t\, dt}{\int_0^\infty N_0 e^{-\lambda t} dt}$ otrzymujemy, całkując licznik przez części, $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$.

Okres połowicznego rozpadu $t_{1/2}$ to taki czas, w którym N = ½ $N_0$:

$$\frac{1}{2}N_0=N_0 e^{\frac{-t_{1/2}}{\tau}} \;\Leftrightarrow\; e^{\ln 1/2}=e^{\frac{-t_{1/2}}{\tau}} \;\Leftrightarrow\; t_{1/2}=\tau\ln 2.$$

### IV. Zamiana zmiennej.

W wielu przypadkach możemy dokonać zamiany zmiennych, dzięki której całkowanie jednej ze stron równania jest prostsze po różniczce nowej zmiennej.

**Przykład:** rozwiązać równanie: $y' = ctg\, x$ zakładając nieznajomość funkcji pierwotnej cotangensa.

Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych. Rozwiązujemy: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow dy = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx$. Wprowadzamy nową zmienną, $t:=\sin x;\quad dt=\cos x\, dx$.

Widzimy, że nasze równanie sprowadza się do łatwej do odcałkowania postaci

$$dy=\frac{d\sin x}{\sin x} \;\Leftrightarrow\; y = \ln\sin x + C.$$

### V. Metoda czynnika całkującego.

Jest to fundamentalna metoda rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych stopnia pierwszego, użyteczna dla równań postaci: $y' + P(x)y = Q(x)$ , gdzie $P$ i $Q$ to dowolne funkcje analityczne zmiennej $x$ ciągłe w obszarze rozwiązywania równania.

Czynnikiem całkującym μ nazywamy taką funkcję zmiennej *x*, przez którą po obustronnym pomnożeniu równania, cała jedna strona równania staje się zupełną różniczką (trywialną do odcałkowania). Dla równań powyższej postaci, czynnikiem całkującym jest funkcja:

$$\mu = e^{\int_0^x P(t)dt}.$$

**Przykład:** rozwiążmy przykład z problemu I. metodą czynnika całkującego. Mamy więc równanie: $y' - \frac{2y}{x} = 0.$ $P(x) = \frac{-2}{x}, Q(x) = 0.$ Czynnikiem całkującym jest

$$\mu = e^{-2\int_0^x \frac{dt}{t}} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}.$$

Mnożymy obustronnie: $\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x\,y' - 2y}{x^3} = 0.$ Widzimy, że otrzymamy kompletną formułę na pochodną ilorazu, jeśli tylko licznik i mianownik pomnożymy jeszcze przez *x:*

$$\frac{x^2 y' - 2xy}{x^4} = 0 \Leftrightarrow [\frac{y}{x^2}]' = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} = Const \Leftrightarrow y = C x^2.$$

Proszę porównać wynik z otrzymanym w problemie I.

**VI. a, b. Zastosowania iloczynu skalarnego wektorów.**

Iloczynu skalarnego w geometrii euklidesowej używa się przede wszystkim do zdefiniowania normy wektora, która w przypadku $\mathbb{R}^n$ jest tożsama z długością euklidesową wektora, a w konsekwencji prowadzi do twierdzenia Pitagorasa (dla wektorów prostopadłych). Iloczyn skalarny można także wykorzystać do prostego mechanizmu sprawdzania współliniowości trzech punktów. Pokażemy oba w punktach poniżej.

*Na marginesie:* do określenia, czy dany punkt leży na płaszczyźnie o zadanym wzorze, albo, równoważnie, czy cztery zadane punkty leżą na jednej płaszczyźnie (bo 3 punkty zadają dokładnie jedną płaszczyznę), iloczynu skalarnego używać nie ma żadnego sensu (nawet nie wyobrażam sobie tej ekwilibrystyki) – skoro można po prostu podstawić współrzędne punktu do równania płaszczyzny i sprawdzić, czy nie otrzymujemy sprzeczności!

**i. Norma** wektora zdefiniowana jest jako pierwiastek z iloczynu skalarnego wektora z sobą samym:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Zauważamy, że wynik jest konsystentny z twierdzeniem Pitagorasa, zastosowanym do (prostopadłych) składowych $\vec{a}_x, \vec{a}_y$ wektora (wynik leży na płaszczyźnie XOY), a następnie ponownie zastosowanym do wyniku (długości ich sumy) i składowej $\vec{a}_z$ :

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \equiv \sqrt{\left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\right)^2 + a_z^2}\ .$$

Dzieląc wektor (każdą jego współrzędną) przez normę tegoż wektora, otrzymamy wektor o długości 1, tj. wektor znormalizowany $\hat{a}$ w kierunku wektora wyjściowego $\vec{a}$ . Wówczas $\vec{a} \equiv \|\vec{a}\| \cdot \hat{a}$. Jest to podział wektora na długość oraz kierunek+zwrot.

**ii.** Zerowanie się iloczynu skalarnego dwóch wektorów przyjmuje się jako warunek definiujący pojęcie **prostopadłości** dwóch wektorów.

**Przykład:** zbadać prostopadłość wektorów $\vec{a} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} := \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

Rozwiązujemy: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 4 + 3\cdot(-3) + (-5)\cdot(-1) = 4-9+5 = 0.$ Wektory są prostopadłe.

Gdy dwa wektory są do siebie prostopadłe, obowiązuje

**a. Wzór Pitagorasa**

Jeśli dwa wektory $\vec{a}, \vec{b}$ są do siebie prostopadłe (ortogonalne), to kwadrat normy ich sumy jest równy sumie kwadratów ich norm:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2 .$$

**Przykład:** sprawdźmy słuszność wzoru Pitagorasa dla wektorów z przykładu powyżej :

$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{bmatrix} 1+4 \\ 3-3 \\ -5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}; \quad \|\vec{a}+\vec{b}\|^2=25+0+36=61.$$

$$\|\vec{a}\|^2=1+9+25=35; \quad \|\vec{b}\|^2=16+9+1=26.$$

Widzimy, że lewa strona równości równa jest prawej.

Naturalnie, postać wzoru Pitagorasa odpowiada ściśle jego „szkolnej" wersji – przyrównania do siebie sumy kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego i kwadratu długości jego przeciwprostokątnej.

**iii. Kąt między dwoma wektorami**

Z prawa rozkładu wektora na prostopadłe współrzędne (prawa składania wektorów) oraz z punktu (ii.) widać, iż iloczyn skalarny osiąga największą wartość, gdy kierunek jednego wektora jest ten sam, co kierunek drugiego wektora (bowiem ów wektor ma **zerową** składową prostopadłą do drugiego wektora). Faktycznie, do iloczynu skalarnego wchodzi tylko **rzut** jednego wektora na kierunek drugiego; długość tego rzutu (składowej wektora 1 stycznej do wektora 2) ma się do długości całego wektora 1 jak cosinus kąta pomiędzy wektorami. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ . Jest to „szkolna" definicja iloczynu skalarnego dwóch wektorów. Oczywiście, czy rzutujemy wektor 1 na 2, czy 2 na 1, wynik jest taki sam, bowiem iloczyn skalarny jest (ze swej definicji) formą symetryczną. Uwidacznia się to w symetrii powyższego wzoru „szkolnego": $\vec{a}\cdot\vec{b} \equiv \vec{b}\cdot\vec{a}$.

W „dorosłej" matematyce, kąt pomiędzy dwoma wektorami **definiowany** jest jako $\arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}\right)$ , czyli $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$ , skąd w rezultacie dostajemy wzór „szkolny".

Proszę zauważyć, że dla zdefiniowania kąta między wektorami wystarczy zdefiniować iloczyn skalarny (oraz w konsekwencji, normę wektora) oraz (funkcję odwrotną do) cosinusa – czyli x-owej współrzędnej punktu, znajdującego się na okręgu jednostkowym (składowej wektora położenia).

**b. Współliniowość trzech punktów.**

Do zbadania współliniowości trzech punktów wystarczy zbudować z dowolnych ich dwóch par wektory, a następnie sprawdzić kąt pomiędzy nimi (cf. punkt iii.). Jeśli wynosi 0 (zwroty zgodne) lub π (zwroty przeciwne), to są one współliniowe.

**Przykład:** sprawdzić, czy punkty A = (1; 2; -3), B = (2; 4; -6) i C = (-2; -4; 6) leżą na tej samej prostej w $\mathbb{R}^3$ .

Rozwiązanie. Tworzymy np. wektory $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ . Jeśli leżą one na tej samej prostej (a zatem ich punkty początkowe i końcowe też), to ich iloczyn skalarny musi być równy +/- iloczynowi ich norm (cf. punkt iii.). Sprawdzamy:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(-6+3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};$$
$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-2-1)^2+(-4-2)^2+(6+3)^2} = \sqrt{9+36+81} = \sqrt{126};$$
$$\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| = \sqrt{14\cdot 126} = \sqrt{2\cdot 7\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7} = 2\cdot 3\cdot 7 = 42.$$
$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} = -3-12-27=-42.$$

Punkty A, B i C istotnie leżą na jednej prostej trójwymiarowej. Różnica w znakach wskazuje, że punkty B i C leżą na niej w przeciwnych kierunkach względem A.